

文章编号: 1000-7598-(2003) 05-0 -05

饱和土一维简谐响应解析解的求解和应用: II 应用

杨 军, 宋二祥, 陈肇元

(清华大学 土木工程系, 北京 100084)

摘 要: 将相关论文^[1]中得到的饱和土一维简谐响应解析解, 应用到饱和土中两类压缩波的独立作用、饱和土中波的传播速度、 $u-p$ 方程的适用范围等研究中。在两类压缩波的独立作用研究中, 克服了以前文献中的数学不严密性。研究了饱和土各参数对三种体波波速的影响。通过比较 $u-w$ 和 $u-p$ 方程的解答, 定量地说明了 $u-p$ 方程的适用范围。

关 键 词: 饱和土; 独立作用; 波速; $u-p$ 方程

中图分类号: TU 435 **文献标识码:** A

Application of analytical solution of 1-D harmonic response in saturated soil

YANG Jun, SONG Er-xiang, CHEN Zhao-yuan

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The analytical solution of 1-D harmonic response in saturated soil, derived in the companion paper^[1], is used in the research of individual contributions of two compression waves, wave velocity and the applicable scale of $u-p$ formulation in saturated soil. Mathematical imprecision is override in the research of individual contributions of two compression waves. The influence of each parameter on the velocity of three volumetric waves is studied. The applicable scale of $u-p$ formulation is quantitatively presented by comparison of the results of $u-w$ and $u-p$ formulation.

Key words: saturated soils; individual contributions of two compression waves; wave velocity; $u-p$ formulation

1 引 言

在前续论文^[1]中, 作者得到了饱和土一维简谐响应解析解, 本文将此解析解应用于饱和土动力响应研究中的几个问题。首先, 将 $u-w$ 方程一维压缩简谐响应解析解应用在饱和土中两类压缩波的独立作用分析中, 克服了以前研究中的数学不严密性, 并且更深入地探讨了荷载频率对地表位移幅值的影响。利用解析解中圆频率和波数的关系, 求解了饱和土中三种体波的波速, 研究了各参数对它们的影响。最后, 通过比较 $u-w$ 和 $u-p$ 方程解析解得到的三种体波波速, 定量地说明了 $u-p$ 方程适用于渗透系数和频率较小的情况。

2 两类压缩波的独立作用

Biot 理论成功地预言了流体饱和多孔介质中存

在两种类型的压缩波。研究者对这两类压缩波不同特性的认识还比较有限。Plona^[2] 在 1980 年第一次实验观测到第二类压缩波。与第一类压缩波相比, 第二类压缩波的作用是相对小的, 但是, 在 Yang^[3] 之前还没有明确的定量比较。Yang 利用分离变量的方法, 得到了一个边值问题(基岩上的饱和土层受到基岩竖向位移简谐振动)的解析解, 定量地比较了两类压缩波的独立作用。本文作者也曾利用相同的方法讨论了另一个边值问题(基岩上的饱和土层在地表受到竖向均布简谐荷载作用的稳态反应), 并研究了两类压缩波独立作用的共性和特性^[4]。但是, 上述方法在分离变量时, 假设了两类压缩波响应比值 δ , 在数学上不十分严谨。在文献[1]中得到的 $u-w$ 方程一维压缩简谐响应解析解很明确地表示为两类压缩波的独立作用, 推导中并未引入不严密的假设, 因此, 在数学上是严谨的。因篇幅的原因, 在此不

收稿日期: 2002-05-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 50078030)

作者简介: 杨军, 男, 1974 年生, 博士, 讲师, 主要从事岩土工程数值和解析方法研究。

罗列各参数对两类压缩波独立作用的影响, 其计算模型及结果见文献[3]和[4]。

对于基岩上的饱和土层在地表受到竖向均布简谐荷载作用的稳态反应, 当荷载频率变化时, 地表土骨架位移相应的幅值也随之变化, 如图 1。图中无量纲土骨架位移 $u_0 = \frac{u}{u_s}$, 其中, $u_s = \frac{\sigma_p L}{\lambda + 2\mu}$, 为排水条件静力荷载作用下饱和土层地表的最大压缩量; σ_p 为地表所受均布简谐荷载的幅值; 第一和第二类压缩波对土骨架位移响应的独立作用分别记为 P-1 和 P-2, 总和记为 P-t。可以看出, 在荷载频率小于 100 Hz 的范围内存在有两个土骨架位移幅值峰值。并且在此渗透系数条件下, 频率大于一定值后, 地表土骨架位移由第一类压缩波控制, 而且峰值衰减很快。地表位移幅值达到峰值时的驻波是振幅相同而传播方向相反的两个平面波 (荷载输入一个波, 基岩反射一个波) 干涉的结果^[5]。波长与土层厚度 L 有如下关系:

$$(2n+1) \frac{\lambda_n}{4} = L \quad (1)$$

式中 n 为阶数; λ_n 为相应的波长。前三阶驻波波形如图 2 所示。当 $n=0$, 得到基阶振型, 对应的是土层竖向运动的基本周期, 在层厚范围内含有 $1/4$ 波长; 当 $n=1$, 层厚内含有 $3/4$ 波长的一阶驻波, $x = \frac{2}{3}L$ 处是波节平面; 当 $n=2$, 层厚内含有 $1\frac{1}{4}$ 波长的二阶驻波, $x = \frac{2}{5}L$ 和 $x = \frac{4}{5}L$ 处是波节平面。

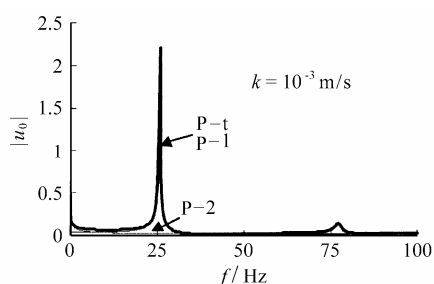


图 1 地表土骨架位移幅值随频率的变化规律
Fig.1 Influence of load frequency on displacement amplitude of soil surface

由于有式(1)的关系, 且控制波动为第一类压缩波, 可以求出各阶驻波的相应频率, 即

$$f_n = (2n+1)f_0 \quad (2)$$

式中 $f_0 = V_{p1}/4L$, 为土层在竖向振动下的基本频率; V_{p1} 为第一类压缩波波速。也就是说, 在奇数倍基本频率荷载作用下, 地表土骨架位移幅值达到峰值。

上面是第一类压缩波控制时的情况。尽管在实际工程中, 基本上都是第一类压缩波控制, 但从理论完整的意义上有必要研究第二类压缩波控制时的情况。如图 3(a)所示, 当 k 增大到 1.0 m/s, 这时的地表土骨架位移由第二类压缩波控制, 式(2)仍然可用, 但是速度需改为第二类压缩波波速 V_{p2} 。由于第二类压缩波波速小, 所以与第一类压缩波控制相比, 峰值频率间隔减小了。这种峰值频率间隔的变化是突变的, 也就是说不存在一种峰值频率间隔在这两者之间。具体由哪一类压缩波控制却是有个过渡过程的, 如图 3(b), 当 $k = 0.1$ m/s, 两类压缩波的作用都较明显 (图中, k 为渗透参数)。

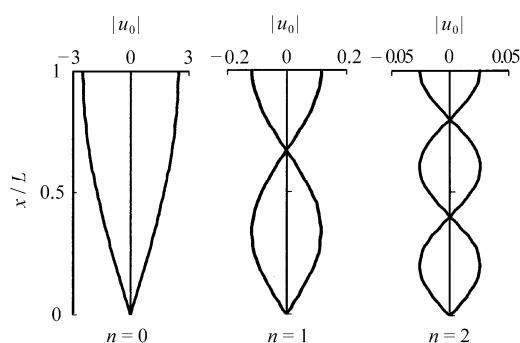
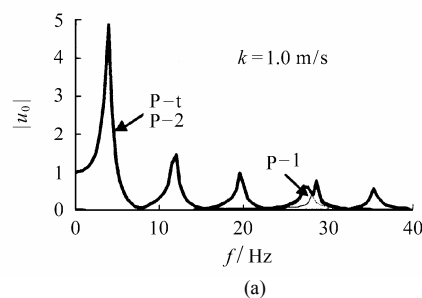
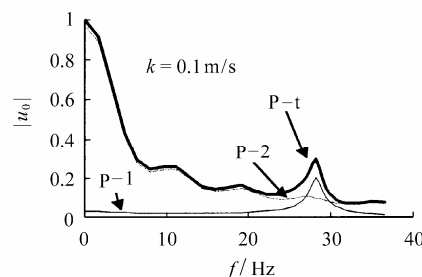


图 2 前三阶驻波波形

Fig.2 Wave shape of first three stationary waves



(a)



(b)

图 3 不同渗透系数下的地表土骨架位移幅值随频率的变化规律
Fig.3 Influence of load frequency to displacement amplitude of soil surface with different permeability

由此可见, 地表土骨架位移在奇数倍土层基本的频率荷载作用达到峰值, 分为第一和第二类压缩波控制两种情况, 这与文献[3], [4]中关于第二类

压缩波没有一般传输波的频率相关性规律的结论是不同的。更准确的结论应该是：在一般工程条件下，往往是第一类压缩波控制，观察到的也是第一类压缩波的频率相关性，响应峰值随频率衰减很快；第二类压缩波由于其随距离的高衰减性，入射波和反射波往往不足以构成干涉，或者峰值过小，被第一类压缩波的作用掩盖了。

3 饱和土中波的传播速度

杨峻等利用数值方法研究了饱和土中三种体波的传播特征^[6]。本文则利用文献[1]的解析解对频率、渗透系数和孔隙率对各种波的速度进行全面的研究。在文献[1]的微分方程求解中，对应一个特定的实圆频率 ω ，就求得相应的复波数，那么相应的第一和第二类压缩波以及剪切波速可以用以下公式求得：

$$V_{p1} = \frac{\omega}{Re(k_1)}; V_{p2} = \frac{\omega}{Re(k_2)}; V_s = \frac{\omega}{Re(k_s)} \quad (3)$$

对于渗透系数和频率取极值的情况：

当 $k_f \rightarrow 0$ ， $\omega \rightarrow 0$ 时，无第二类压缩波

$$V_{p1} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q}{\rho}}; V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (4)$$

当 $k_f \rightarrow \infty$ ， $\omega \rightarrow \infty$ 时，

$$V_{p1} = \left(\frac{2a_4}{-a_2 - (a_2^2 - 4a_4)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}; V_{p2} = \left(\frac{2a_4}{-a_2 + (a_2^2 - 4a_4)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho - n\rho_f}}$$

下面分别讨论频率、渗透系数和孔隙率对三种波速的影响。物理参数见表1。取频率为100, 40 Hz两种情况，孔隙率 $n=0.27$ ，饱和土渗透系数范围为 $10^{-8} \sim 1.0$ m/s 来研究渗透系数对波速的影响，计算结果如图4。可以看出P1波和S波波速在渗透系数轴的两端都有一个平台，也就是存在极值，两个平台间连续地变化段的渗透系数范围上限与下限的比值不超过100。P2波当渗透系数趋近0时，波动现象将退化，当渗透系数很大时也有一个极值。P1波和S波波速受渗透系数的影响较P2波要小得多。频率减小，使得波速曲线沿着渗透系数轴正方向平移。若将频率连续取值，则得到频率对波速的影响，其结果与图4类似，P1波和S波波速在频率轴的两端都存在极值。P2波当频率趋近0时，波动现象将退化，当频率很大时也有一个极值。P1波和S波的频散性很小，P2波的频散性较大。

表1 饱和土的材料参数

名称	参数	取值
土骨架的体积模量	K_b / MPa	43.6
土颗粒的体积模量	K_s / GPa	36
流体的体积模量	K_w / GPa	2
土骨架的剪切模量	μ / MPa	26.1
渗透系数	k / $m \cdot s^{-1}$	$10^{-8} \sim 1.0$
土颗粒的密度	ρ_s / $kg \cdot m^{-3}$	2 650
水的密度	ρ_f / $kg \cdot m^{-3}$	1 000
孔隙率	n	0.05~0.45

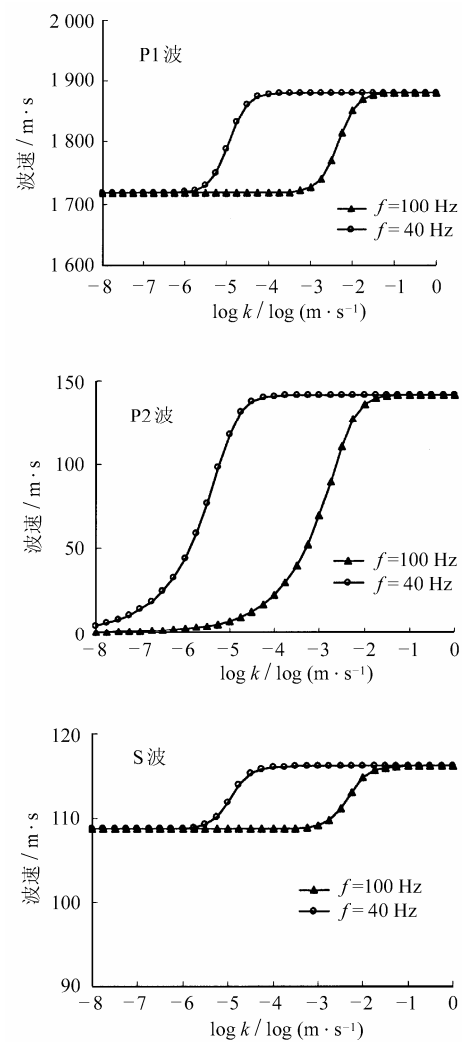


图4 渗透系数的影响

Fig.4 Influence of permeability

取 $k = 10^{-8}$ m/s，频率为100, 40 Hz两种情况。考虑的饱和土孔隙率范围为0.05~0.45来研究孔隙率对波速的影响，计算结果如图5。可以看出，P1波波速随孔隙率的增大而减小，S波和P2波波速随孔隙率的增大而增大。频率的增大使得3种波的波速都增大。但频率的变化对P1波和S波的波速曲线影响不大，而对P2波的波速曲线影响很大。

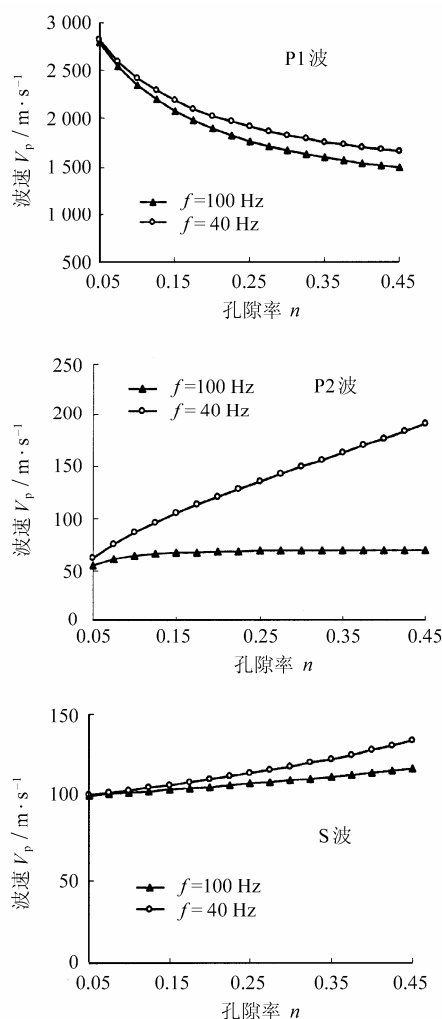


图 5 孔隙率的影响

Fig.5 Influence of pore ratio

4 $u-p$ 方程的适用范围

$u-p$ 方程是一种近似格式, Zienkiewicz^[7]定性地指出其适用于频率较低的情况, 有必要定量地研究其适用范围。

通过文献[1]中 $u-p$ 方程的解析解, 利用式(3)求解由 $u-p$ 方程得到的压缩波波速。对于渗透系数和频率取极值的情况:

当 $k_f \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow 0$ 时(无第二类压缩波),

$$V_{p1} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q}{\rho}}; \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (6)$$

当 $k_f \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \infty$ 时,

$$V_{p1} \rightarrow \infty; \quad V_{p2} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (7)$$

将式(6), (7)与式(4), (5) 比较可以看出: 在 $k_f \rightarrow 0$ 和 $\omega \rightarrow 0$ 时, $u-w$ 方程和 $u-p$ 方程求出的速度极值是一样的; 当 $k_f \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \infty$ 时, $u-w$ 方程

和 $u-p$ 方程求出的速度极值相差甚远。

图 6 比较了 $u-w$ 方程和 $u-p$ 方程求解的波速, 可以看出, 当

$$\log(f/f_c) < -0.5 \quad (8)$$

两个方程求解的波速基本相同。其中, f_c 为 Ishihara^[8]定义的特征频率, $f_c = n/2\pi \rho_f k_f$, 对砂土的频率取值范围在几百 Hz 到几十 kHz, 对粘土的频率取值范围在几百 kHz 到几十 MHz。

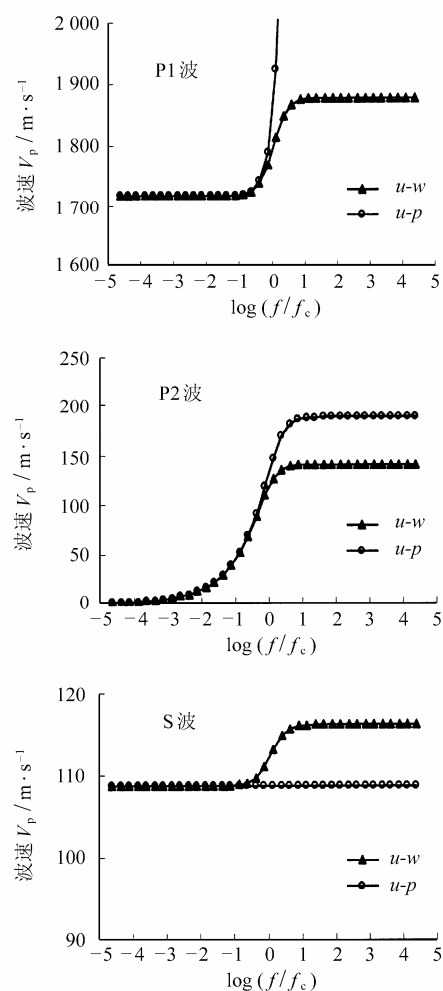


图 6 无量纲频率的影响

Fig.6 Influence of non-dimensional frequency

可见, $u-p$ 方程仅适用于渗透系数和频率较小的情况, 具体需要满足式(8)的条件。很显然, 对一般的渗流和地震等工程问题, 这个条件都是满足的。这也是作者在饱和土三维有限元计算^[9]中采用 $u-p$ 方程的依据。

5 结 语

本文利用饱和土一维简谐响应解析解, 分析了两类压缩波的独立作用, 指出地表土骨架位移在奇

数倍土层基本频率荷载作用下达到峰值, 分为第一和第二类压缩波控制两种情况; 研究了频率、渗透系数和孔隙率对饱和土中 3 种体波波速的影响; 通过与精确解比较, 定量地说明了 $u-p$ 近似格式的适用范围为渗透系数和频率较小的情况。

参 考 文 献

- [1] 杨军, 宋二祥, 陈肇元. 饱和土一维简谐响应解析解的求解和应用: I 求解[J]. 岩土力学, 2003, 24(4):
- [2] Plona J. Observation of a second bulk compressional wave in porous medium at ultrasonic frequency [J]. **Applied physics letters**, 1980, 36: 259—261.
- [3] Yang Jun, Sato T. Computation of individual contributions of two compression waves in vibration of water-saturated soils[J]. **Computers and Geotechnics**, 2000, 27: 79—100.
- [4] 杨军, 宋二祥, 陈肇元. 饱和土动力反应中两类压缩波的独立作用分析[J]. 岩土力学, 2001, 22(2): 199—203.
- [5] 何樵登. 地震波理论[M]. 北京: 地质出版社, 1988.
- [6] 杨峻, 吴世明, 蔡袁强. 饱和土中弹性波的传播特征[J]. 振动工程学报. 1996, 9(2): 128—137.
- [7] Zienkiewicz O C, Shiomi T. Dynamic behaviour of saturated porous media; The generalized Biot formulation and its numerical solution[J]. **International journal for numerical and analytical methods in geomechanics**, 1984, 8: 71—96.
- [8] Ishihara K. Approximate forms of wave equations for water saturated porous materials and related dynamics modulus[J]. **Soils and Foundations**, 1970, 10(4): 10—38
- [9] 杨军. 饱和土动力反应分析及其在桩基振动阻抗计算中的应用[博士学位论文 D]. 北京: 清华大学, 2001.